Bilanci IAS/IFRS

Problematiche applicative e prospettive future nel settore assicurativo

Best estimate delle riserve tecniche e risk margin

Massimo De Felice, Università di Roma “La Sapienza”

Franco Moriconi, Università di Perugia

ANIA – Roma, 5 luglio 2006

Da dove partiamo ⟵ [CFO-06, pp. 6-7, BC12/BC13/BC14]

"The term *best estimate* means different things to different people and is defined in various ways across the breadth of legislation, regulation and financial reporting. Some of the current uses include:

1 – the "mean" ... or "probability weighted average" estimate;

2 – the "median estimate" ... equal likelihood ... to be too small or too large;

3 – prudent estimate ... an explicit margin to increase the estimate or individual assumptions are adjusted to incorporate an implicit margin for prudence;

4 – IAS37 definition ... the amount that an entity would rationally pay to settle the obligation at the balance sheet date or to transfer it to a third party at that time.

The CFO Forum believes that the *best estimate* should be equal to the mean estimate ... so that the liability valuation should consider both the amount and likelihood of future cash flow."

"Management's *best estimate* of the future should not include any margins for risk and uncertainty since an additional allowance for risk and uncertainty is included elsewhere in the liability valuation."

"... In practice, it can be very difficult to determine wheather an individual assumption is a *best estimate*. In many cases, it is not the individual assumption that is important but its relationship with other assumptions. Management should be satisfied that the aggregate valuation basis reflects their view of probability weighted average of expected future cash flows prior to an allowance for risk and uncertainty."

$\longrightarrow$ **esigenza di una definizione "operazionale", finalizzata al calcolo**.

Un modello per definizioni e scelte coerenti

Sia $\boldsymbol{Y}$ un vettore di importi aleatori distribuiti nel tempo, dopo t.

• vita: prestazioni $\boldsymbol{Y}$ indicizzate prodotte da polizze rivalutabili
$\longrightarrow$ incertezza finanziaria (prevalente) + incertezza tecnica.

• danni: payoff $\boldsymbol{Y}$ di natura essenzialmente "reale"
$\longrightarrow$ incertezza tecnica (preoponderante) + incertezza "inflattiva".

Il *fair value* di $\boldsymbol{Y}$ in t

$$V_t := \mathcal{V}(t; \boldsymbol{Y})$$

è "... *the market value, if a sufficiently active market exists, OR an estimated market value, otherwise.*" $\longleftarrow$ [Casualty Actuarial Society, 2000].

• Il fair value $\mathcal{V}$ di un portafoglio di contratti in essere

- ⊙ per contratti scambiati $\longrightarrow$ $\mathcal{V}$ è "**marked-to-market**"
  i risultati sono i prezzi osservati;
- ⊙ per contratti non-scambiati $\longrightarrow$ $\mathcal{V}$ è "**marked-to-model**"
  i risultati sono dati da un modello stocastico di *pricing*.

La valutazione “marked-to-model”

Il modello deve essere *coerente col mercato* (*market consistent*):
trattare *coerentemente* **aspettative naturali** e **premi per il rischio**

a – se nel mercato sono scambiati contratti simili o collegati ai contratti non-traded da valutare:

$\longrightarrow$ calibrare il modello sui prezzi quotati,

: stima delle distribuzioni di probabilità risk-neutral

$\longrightarrow$ applicare il modello così calibrato ai contratti non-traded

b – altrimenti:

$\longrightarrow$ come specificare le aspettative?

$\longrightarrow$ come determinare i premi al rischio *market consistent*?

Il caso **a** è tipico dell’incertezza finanziaria
il caso **b** è tipico dei rischi tecnici (attuariali).

Lo schema formale, per avviare i calcoli

- Si prescinde dallo sconto

⟶ Con la probabilità risk-adjusted:

$$V_t := \mathcal{V}(t; \boldsymbol{Y}) = \mathbf{E}_t^Q(\boldsymbol{Y}) \,,$$

dove l'aspettativa è calcolata con la misura risk-neutral di mercato.

⟶ Con la probabilità naturale:

$$V_t := \mathcal{V}(t; \boldsymbol{Y}) = \mathbf{E}_t(\boldsymbol{Y}) + \lambda_t \,,$$

essendo:

$\mathbf{E}_t(\boldsymbol{Y})$: *best estimate* in t delle liability in-essere $\boldsymbol{Y}$;

$\lambda_t \geq 0$: premio al rischio di mercato in t (*market value margin*, *market risk loading*, *risk margin*).

! le due valutazioni debbono essere *coerenti* perché $\mathbf{E}^Q$ è un modo potente e elegante per incorporare il premio al rischio.

RAMI VITA – Aspetti salienti delle prestazioni

Le prestazioni $\boldsymbol{Y}$ sono caratterizzate da incertezza finanziaria e da incertezza attuariale

- la struttura contrattuale delle polizze rende complessa l'incertezza finanziaria
  - · le prestazioni sono legate al rendimento dei titoli "a copertura" delle riserve
  - · l'indicizzazione è a un rendimento "contabile" (tradizionali) o "di mercato" (unit)
  - · ci sono opzioni implicite scritte sul rendimento del fondo, che dipendono quindi dalla strategia di gestione
  - · le opzioni sono "cliquet" e/o "a scadenza"
  - · allo stesso fondo possono riferirsi opzioni con diverso *strike* (minimo garantito)
  - · sono – e possono diventare più – rilevanti i vincoli regolamentari (Solvency II)
- l'incertezza attuariale è più facilmente trattabile
  - · modelli assolutamente "convenzionali"
- è condivisa l'ipotesi di indipendenza tra incertezza finanziaria e incertezza attuariale.
  - · è prassi che i rischi corrispondenti siano trattati separatamente.

$\Longrightarrow$ la complessità di $\boldsymbol{Y}$ deve essere gestita con la logica "marked-to-model", fondata sulle regole del *pricing*, orientata al *fair value*.

Per calcolare i valori non c'è bisogno di calcolare il Risk margin

Per le polizze vita il fair value della riserva – e delle componenti della riserva – può essere calcolato senza dover calcolare "separatamente" il risk margin.

Il modello utilizza l'impostazione basata sulla probabilità risk-adjusted:

$$V_t := \mathcal{V}(t; \boldsymbol{Y}) = \mathbf{E}_t^Q(\boldsymbol{Y}) \,,$$

dove l'aspettativa è calcolata con la misura risk-neutral, stimata sui dati di mercato.

$\longrightarrow$ il risk margin è automaticamente e coerentemente contenuto nel prezzo.

• Anche in Solvency II e nei **QIS2** si dice di dover considerare: $\longleftarrow$ [CEIOPS-06, p. 6]

· "market-consistent values for risks where hedges are readly available
(e.g. financial risks)"

· "best estimate + risk margin approach ... for other risks
(e.g. some insurance risks)".

Avvertenze per il calcolo del Risk margin tecnico

In $t = 0$ l'equivalente certo della prestazione al tempo τ è definito dalla:

$$\overline{\overline{C}}_\tau := C_0\, \mathbf{E}^P\big(\mathbb{I}_{\mathcal{E}(\tau)}\big) + \gamma_\tau\,,$$

· C_0 è il capitale assicurato
· $\mathbf{E}^P$ è l'aspettativa secondo le probabilità "naturali"
· $\mathbb{I}_{\mathcal{E}(\tau)}$ è la funzione indicatrice di $\mathcal{E}(\tau) :=$ "*la prestazione C_τ è dovuta al tempo τ*"
(per premorienza e/o sopravvivenza e/o altre cause)
· γ_τ è il *risk loading* (componente, non scontata, del risk margin).

● si può porre $\gamma_\tau := c^A_\tau$
: c^A_τ è il costo per interessi nell'anno τ del risk capital tecnico richiesto dalla polizza.

Il metodo è stato applicato al **Bilancio RAS 2004** per il **calcolo del VBIF**
$\longleftarrow$ [CDFMP-2005].

! A causa della durata "lunga" delle polizze il fair value complessivo del costo del capitale può venire "alto", anche dell'ordine di grandezza del Risk capital tecnico (capitale complessivamente assorbito dai rischi tecnici).

Che cosa può dare un modello coerente di pricing

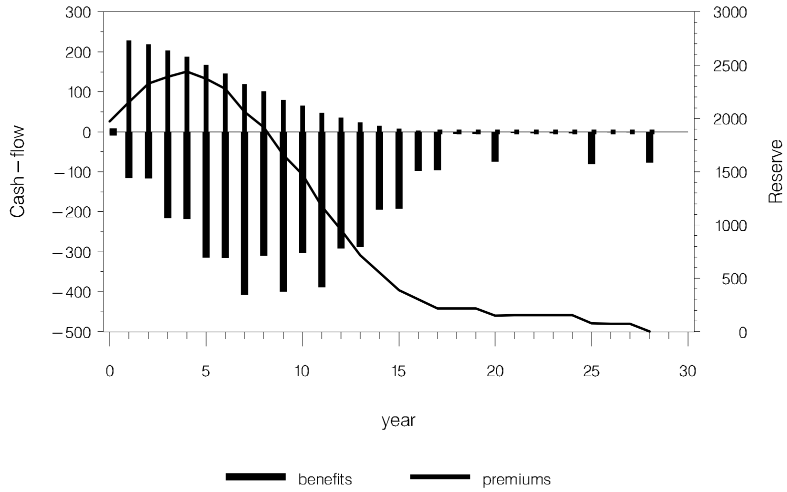
- Obiettivo generale
  - · tenere sotto controllo fattori interrelati – andamenti di mercato, aspetti contrattuali, vincoli regolamentari –, e male analizzabili separatamente
  - · fornire misure di valore e di rischio quanto più possibile collegate al mercato
  - · realizzare *what if* coerenti, data la complessità del contesto

- Obiettivi particolari:
  - · riserva al fair value (riserva stocastica)
  - · valore della componente garantita
  - · VBIF
  - · valore delle opzioni implicite (scomposizione put e call)
  - · time value e intrinsic value delle put ⟵ European Embedded Value Principles
  - · duration "effettiva" delle prestazioni (la duration di Macaulay è pericolosa per l'alm!)
  - **!** tutte le grandezze dipendono dalla strategia di gestione del portafoglio.

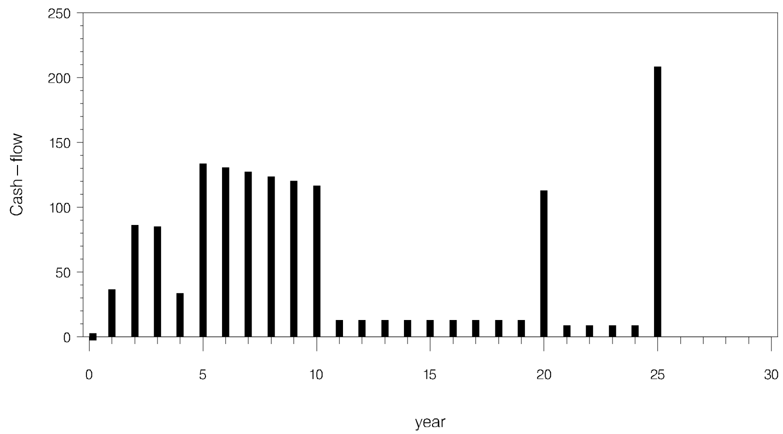
⟶ **QIS2**: *total technical provisions*, *discretionary benefits*, *net market value*, *reduction for profit-sharing* [CEIOPS-06, pp. 19, 26-31].

Considerazioni sui numeri. I portafogli di riferimento ⟵ [CDFMP-05]

- portafoglio polizze

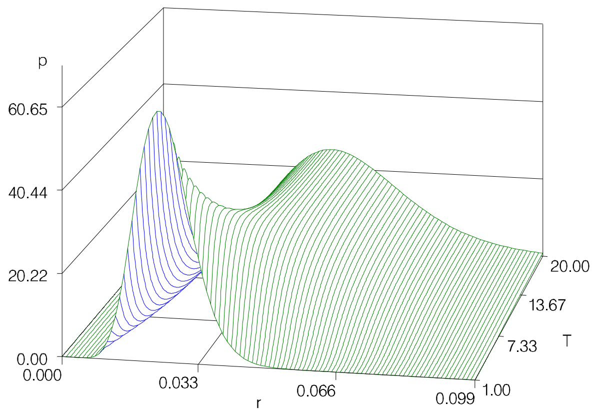


- portafoglio titoli "tipo 1"

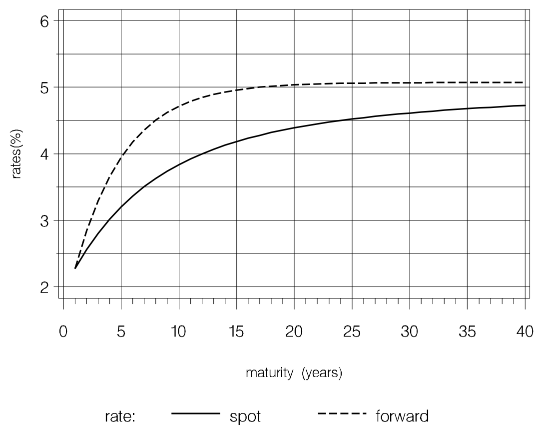


La situazione di mercato (31 dicembre 2004)

- distribuzione risk-neutral dello spot rate



- struttura per scadenza dei tassi (a pronti e a termine)



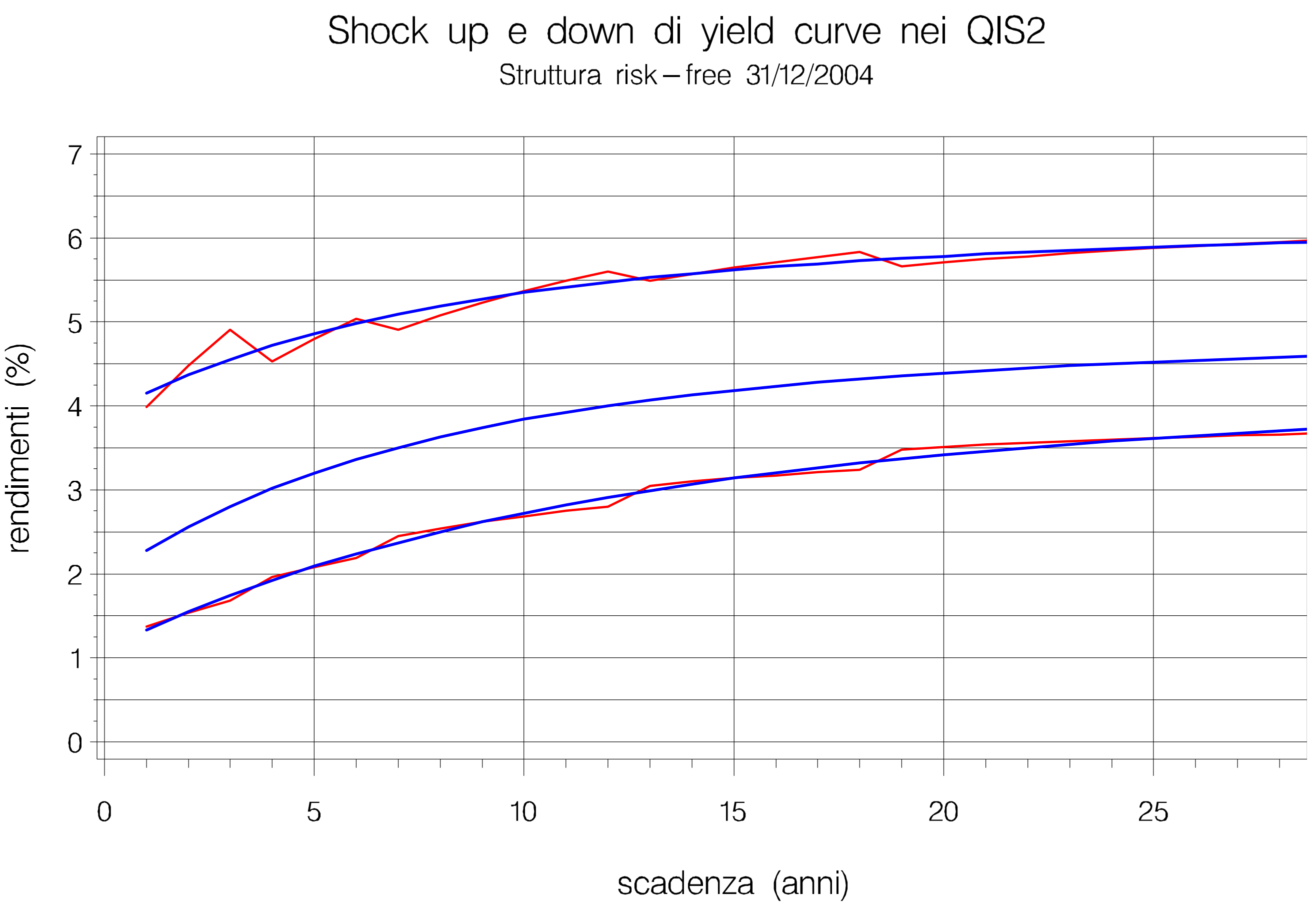
Portafoglio polizze in run-off; portafoglio titoli “tipo 1”; strategia con detenzione a scadenza, reinvestimenti e coperture “a breve”

Riserva di bilancio (R_0)	1.971,63	
Valore di mercato titoli (D_0)	**1.971,63**	(MV_{FI})
Valore di bilancio titoli (D_0^s)	1.971,63	
Plus/minus iniziali ($D_0 - D_0^s$)	0,00	
VBIF (E_0)	**115,29**	(*NAV*)
VBIF/Riserva (%)	5,85%	
Riserva stocastica ($V_0 = R_0 - E_0$)	**1.856,34**	(*TP*: total Technical Provisions)
Valore base degli utili (E_0^B)	211,51	
Prezzo delle put ($P_0 = E_0^B - E_0$)	96,23	
Prezzo delle put/Riserva (%)	4,88%	
Valore della componente garantita (E_0^G)	166,28	
Prezzo delle call ($C_0 = E_0^G - E_0$)	**50,99**	($TP_{benefits}$: *TP* rel. to discretionary benefits)
Prezzo delle call/Riserva (%)	2,59%	
Valore intrinseco delle put (IV_0)	89,34	
Time value delle put (TV_0)	6,89	
Valore dei premi attesi	1.402,20	
Valore delle prestazioni attese	3.207,65	
Duration Mc prestazioni attese	8,574	
Valore passività nette attese ($G_0 = V_0 - C_0$)	**1.805,45**	(*TP* rel. to guar. and stat. benefits)
Duration Mc passività nette attese	11,612	
Duration Mc titoli	8,689	

Portafoglio polizze in run-off; strategia con investimenti e coperture "a breve"

Riserva di bilancio (R_0)	1.971,63	
Valore di mercato titoli (D_0)	**1.971,63**	(MV_{FI})
Valore di bilancio titoli (D_0^s)	1.971,63	
Plus/minus iniziali ($D_0 - D_0^s$)	0,00	
VBIF (E_0)	**67,42**	(NAV)
VBIF/Riserva (%)	3,42%	
Riserva stocastica ($V_0 = R_0 - E_0$)	**1.904,21**	(TP: total Technical Provisions)
Valore base degli utili (E_0^B)	221,78	
Prezzo delle put ($P_0 = E_0^B - E_0$)	154,37	
Prezzo delle put/Riserva (%)	7,83%	
Valore della componente garantita (E_0^G)	165,21	
Prezzo delle call ($C_0 = E_0^G - E_0$)	**97,79**	($TP_{benefits}$: TP relating to discretionary benefits)
Prezzo delle call/Riserva (%)	4,96%	
Valore intrinseco delle put (IV_0)	120,72	
Time value delle put (TV_0)	33,65	
Valore dei premi attesi	1.402,20	
Valore delle prestazioni attese	3.207,65	
Duration Mc prestazioni attese	8,574	
Valore passività nette attese ($G_0 = V_0 - C_0$)	**1.805,45**	(TP rel. to guar. and stat. benefits)
Duration Mc passività nette attese	11,612	
Duration Mc titoli	1,000	

Gli “stress” di tasso QIS2



$$K^G = \max\left\{\begin{array}{c} 0 \\ (A - A^+) - (G - G^+) \\ (A - A^-) - (G - G^-) \end{array}\right\} = \max\left\{\begin{array}{c} 0 \\ (1971,63 - 1810,63) - (1805,45 - 1607,58) \\ (1971,63 - 2155,90) - (1805,45 - 2029,76) \end{array}\right\}$$

$$= \max\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 161,00 - 197,87 \\ -184,27 - (-224,31) \end{array}\right\} = \max\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -36,87 \\ 40,04 \end{array}\right\} = \mathbf{40,04}$$

$$K = \max\left\{\begin{array}{c} 0 \\ (A - A^+) - (V - V^+) \\ (A - A^-) - (V - V^-) \end{array}\right\} = \max\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -\Delta E^+ \\ -\Delta E^- \end{array}\right\}$$

$$= \max\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 115,29 - 130,42 \\ 115,29 - 89,76 \end{array}\right\} = \max\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -15,13 \\ 25,53 \end{array}\right\} = \mathbf{25,53}$$

$$k\,C_0 = K^G - K = 40,04 - 25,53 = \mathbf{14,51}$$

$$k = \frac{K^G - K}{C_0} = \frac{14,51}{50,99} = \mathbf{28,46}\%$$

Descrizione tecnica dei portafogli, e delle strategie di gestione

1 – Il portafoglio polizze

Il portafoglio polizze è composto da polizze miste rivalutabili, a premio unico e a premio annuo costante.
Sia: n: durata della polizza all'emissione (anni interi); a: antidurata (anni interi); $\underline{i}$: tasso tecnico;
β: coefficiente di retrocessione.
Caratteristiche del portafoglio:
per le polizze a premio unico: $n = 30$; per le polizze a premio annuo: $n = 10, 12, ..., 18, 20$;
Il portafoglio è "strutturato" in tre fasce:
fascia **1** – polizze "vecchie": SIM81, $\underline{i} = 4\%$, $\beta = 80\%$; 1 premio unico $a = 10$; 18 premio annuo con $a = 7$, 8, 9;
fascia **2** – polizze "medie": SIM92, $\underline{i} = 3\%$, $\beta = 85\%$; 1 premio unico $a = 5$; 12 premio annuo con $a = 5$, 6;
fascia **3** – polizze "giovani": SIM92, $\underline{i} = 2.5\%$, $\beta = 85\%$; 1 premio unico $a = 2$; 12 premio annuo con $a = 3$, 4;
Il portafoglio è quindi composto da 45 polizze.
Altre caratteristiche: testa di età $x = 40$ anni; capitale iniziale assicurato $C_0 = 100$.

• Meccanismo di rivalutazione

Sia: C_τ: capitale assicurato al tempo τ; I_τ: rendimento della gestione nell'anno $[\tau - 1, \tau]$;
$\underline{h}$: minimo trattenuto (dall'assicurazione); $\underline{\delta}$: minimo garantito oltre il tasso tecnico.
Il meccanismo di rivalutazione è definito dalla:

$$C_\tau = C_{\tau-1}(1 + \rho_\tau)\,.$$

Per le premio unico è:

$$\rho_\tau := \frac{\max\left\{ \min\{\beta\, I_\tau,\ I_\tau - \underline{h}\} - \underline{i},\ \underline{\delta}\right\}}{1 + \underline{i}}$$

Per le premio annuo si ha:

$$C_\tau = C_{\tau-1}\,(1+\rho_\tau) - C_0\,(a/n)\,\rho_\tau\,.$$

In tutte le fasce è: $\underline{\delta} = 0$, $\underline{h} = 1\%$.
La riserva di bilancio è $R_0 = 1971.63$.

2 – Prima strategia di copertura della riserva

• Composizione del portafoglio titoli (portafoglio titoli "tipo 1")

Al tempo $t = 0$ il portafoglio è composto da titoli "non-rischiosi" (titoli di Stato), a tasso fisso, con maturity compresa tra 2 e 25 anni.
Per ciascun titolo, il tasso nominale è posto uguale al valore corrente del tasso swap con scadenza uguale alla maturity.

Sono state considerate scadenze a: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 25 anni; gli importi nominali sono stati scelti in modo che i titoli abbiano un peso percentuale sul prezzo di portafoglio uguale a:
5, 5, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 20, rispettivamente.
Poiché il tasso nominale di ciascun titolo è uguale al corrispondente par yield, tutti i titoli in $t = 0$ quotano alla pari.
Dato che $D_0 = D_0^s$ il valore del portafoglio è 1971.63, quindi è pure $D_0^s = R_0$ per costruzione.

• Caratteristiche della strategia di gestione – portafoglio in run-off:

- le prestazioni sono pagate usando dapprima i premi incassati;
- i titoli sono detenuti a scadenza se non necessari per i rimborsi o per realizzare gli utili;
- l'utile $(D_\tau^s - R_\tau > 0)$ è immediatamente realizzato vendendo a prezzo di mercato obbligazioni per un ammontare di valore contabile $D_\tau^s - R_\tau$, scegliendo le più prossime alla scadenza;
- se si ha un ammanco $(D_\tau^s < R_\tau)$ il fondo è rifinanziato dall'assicurazione acquistando BOT a 1 anno per un ammontare $R_\tau - D_\tau^s$;

· i costi di rifinanziamento sono trattati come profitti negativi;

· tutti i reinvestimenti (cedole, capitali scaduti, premi in eccesso) sono effettuati con strategie di roll-over su BOT annuali, a prezzi di mercato.

Ne consegue che:

· I_1 è dato essenzialmente dalla media ponderata dei tassi nominali dei titoli in portafoglio; è quindi una media dei tassi a pronti correnti, poiché i tassi nominali sono stati definiti come par yield

· negli anni successivi, poiché i reinvestimenti avvengono in BOT a 1 anno, il rendimento del fondo si avvicina progressivamente al rendimento di mercato a 1 anno.

3 – Seconda strategia di copertura della riserva

• Composizione del portafoglio titoli

Tutti i titoli detenuti sono BOT a 1 anno. Si ha $D_0 = D_0^s = 1971.63$

• Caratteristiche della strategia di gestione – portafoglio in run-off:

· le prestazioni sono pagate usando dapprima i premi incassati;

· tutti i reinvestimenti sono effettuati con BOT a 1 anno;

· gli utili e i rifinanziamenti sono realizzati vendendo e comprando BOT ai prezzi di mercato;

· i costi di rifinanziamento sono trattati come profitti negativi.

Ne consegue che:

- i rendimenti annuali della gestione andranno a coincidere con i rendimenti a 1 anno; in genere risulteranno minori dei rendimenti sulle scadenze più lunghe della yield curve.
- le regole contabili non sono più efficaci per "isolare dal mercato" il fondo, e ridurre la volatilità dei rendimenti;
- sul lungo periodo i rendimenti di gestione delle due strategie convergono;
- in mercati obbligazionari efficienti la strategia di roll-over equivale a detenere un portafoglio di titoli con indicizzazione "perfetta".

Precisazioni e dettagli sono in [CDFMP-2005], pp. 52-61.

4 – Caratteristiche della procedura di valutazione

Le strategie di investimento sono state tradotte in forma algoritmica, e "incorporate" in una procedura di simulazione Monte Carlo.

- In ciascuna iterazione della procedura è stata simulata una traiettoria di tassi di mercato, di lunghezza uguale alla maturity massima dei cash-flow generati dal portafoglio in essere (25 anni);
- la regola di gestione, applicata lungo tutta la traiettoria, genera un flusso di profitti/perdite annui, che vengono attualizzati col corrispondente "fattore di sconto stocastico", cioè calcolato coi tassi di interesse generati lungo la stessa traiettoria;
- gli "scenari" sui tassi futuri sono stati generati utilizzando il modello CIR calibrato sulla situazione di mercato in $t = 0$;
- la calibrazione consente di individuare la misura di probabilità risk-neutral implicita nei prezzi in $t = 0$, che viene usata per campionare le traiettorie;

- dato che i profitti/perdite così generati hanno il significato di cash-flow aggiustati per il rischio, l'attualizzazione viene effettuata utilizzando il fattore di sconto risk-free;
- secondo i principi del "pricing by arbitrage", la media su tutte le iterazioni del valore attuale di tutti i profitti/perdite di ciascuna traiettoria fornisce il valore di mercato degli utili futuri generati dal portafoglio in essere; esprime quindi il value of business in force, il VBIF, E_0 in $t = 0$;
- il costo della garanzia di minimo si ottiene calcolando il valore "base" E_0^B, ottenuto avendo posto uguali a -1 (-100%) tutti i livelli di rendimento minimo garantito considerati nelle formule di rivalutazione delle prestazioni;
- il valore della garanzia di rendimento minimo è dato da $E_0^B - E_0$;
- la scomposizione put delle riserve si ottiene ricavando la riserva stocastica come $V_0 = R_0 - E_0$ e calcolando il valore base come $B_0 = V_0 - O_0^P$.

5 – La situazione di mercato

È stata considerata la situazione di mercato del 31 dicembre 2004.

Il modello di CIR è stato identificato con i parametri:

$$r(0) = 0.01934\,, \quad \widehat{\alpha} = 0.21923\,, \quad \widehat{\gamma} = 0.05068\,, \quad \rho = 0.04918\,,$$

che caratterizzano la distribuzione di probabilità risk-neutral.
Precisazioni e dettagli sono in [CDFMP-2005], pp. 35-41; e per la procedura di stima in [DFM-05], 92-94.

RAMI DANNI – Grandezze (aleatorie) da definire

- $v(t,\theta)$: fattore di sconto di mercato al tempo t per $\theta \geq t$.
  Ipotesi: tassi di interesse deterministici

$$v(t, t+\tau) \textit{ per } t > 0 \textit{ sono noti al tempo } 0.$$

- $D := \sum_{\tau=1}^{T} v_\tau \, Y_\tau$: valore scontato delle OLL ($v_\tau := v(0,\tau)$).

- $L := \sum_{\tau=1}^{T} Y_\tau$: valore non-scontato delle OLL (riserva tradizionale).

Aspettative in $t = 0$:

$$\overline{Y}_\tau := \mathbf{E}_0(Y_\tau), \qquad M_0 := \mathbf{E}_0(D) = \sum_{\tau=1}^{T} v_\tau \, \overline{Y}_\tau, \qquad \overline{L} := \mathbf{E}_0(L) = \sum_{\tau=1}^{T} \overline{Y}_\tau.$$

Formalizzare la definizione

Al tempo 0 il *Requisito di riserva* è definito da:

$$R_0^* := \mathit{Best\ Estimate} + \mathit{Risk\ Margin} = M_0 + \lambda_0 \,.$$

$\lambda_0 > 0$: margine prudenziale per compensare l'incertezza delle OLL.

Nel dibattito su "Solvency II" sono considerati due metodi alternativi per il calcolo del Risk Margin specifico dei "rischi non-hedgeable":

· **tecnica del quantile**,

· **tecnica del Cost-of-Capital** $\longleftarrow$ [FOPI-04; CRO-06].

1 – La tecnica del quantile

La riserva è definita come l'α-*quantile* di D:

$$R_0^* = \mathbf{Q}_0^{(\alpha)}(D)\,, \qquad \lambda_0 = \mathbf{Q}_0^{(\alpha)}(D) - \mathbf{E}_0(D)\,,$$

con α opportunamente definito. Valore tipico: $\alpha = 75\%$.

$\longrightarrow$ è **necessaria la distribuzione di probabilità** di D.

Come ricavare le distribuzioni di probabilità

Le tecniche tradizionali producono soltanto stime puntuali dei valori delle OLL, senza indicazioni sulla variabilità: non permettono di calcolare misure di risk capital e di risk margin.

$\longrightarrow$ **è inevitabile utilizzare modelli stocastici di *loss reserving***.

• i 2 modelli più diffusi: estensione stocastica del *chain-ladder*

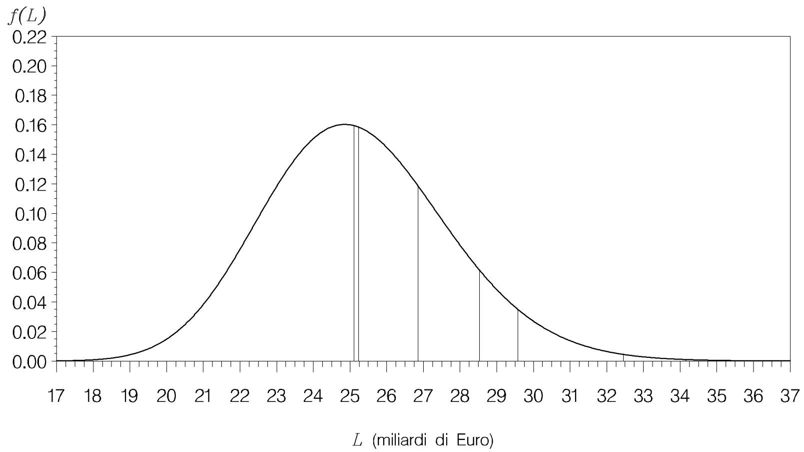
Il modello di Poisson iperdisperso (ODP): bootstrapping+ simulazione Monte Carlo; fornisce le distribuzioni di tutte le variabili rilevanti.

Il modello di Mack (DFCL): è “distribution free”; per calcolare i quantili è necessario “sovrapporre” una distribuzione (è stata utilizzata la lognormale).

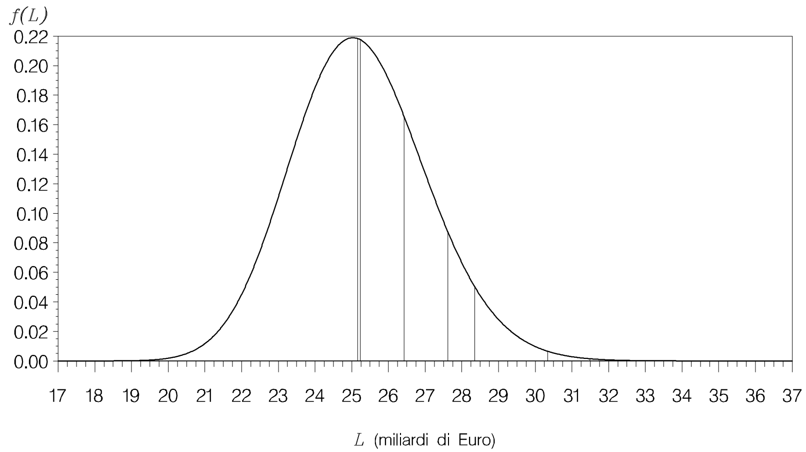
$\longleftarrow$ [RV-98; EV-99; E-02; DFM-03], [M-93].

Esempi di distribuzioni. Distribuzione di costi dell'RC Auto (75 compagnie, 2004).

- Modello ODP



- Modello DFCL



$\longleftarrow$ il **modello ODP** è "**più prudenziale**".

Approfondimenti sul mercato italiano dell'RC Auto

- triangoli del 2004, con 10 anni di pagamenti di 40 compagnie ($\sim$ 90% della riserva totale del mercato)

- fattori di sconto e tassi di interesse risk-free (31 dicembre 2004)

τ	v_τ	i_τ
1	0.9777	2.28
2	0.9507	2.56
3	0.9204	2.80
4	0.8879	3.02
5	0.8542	3.20
6	0.8200	3.36
7	0.7857	3.50
8	0.7519	3.63
9	0.7187	3.74

2. La tecnica del Cost-of-Capital

Il Risk margin è definito come "costo di copertura" del Risk capital per tutta la durata delle OLL.

Sia K_τ il Risk capital richesto al tempo $t = \tau$ per l'anno $[\tau, \tau + 1]$ $(\tau = 0, 1, \ldots, T - 1)$.

Nella logica del Cost-of-Capital si ha:

$$\lambda_0 = \kappa_0 := \sum_{\tau=1}^{T} v_\tau \, c_\tau \, ,$$

dove c_τ è il costo di $K_{\tau-1}$ (da pagare in τ), definito da:

$$c_\tau := s \, \mathbf{E}_0(K_{\tau-1}) \, ,$$

s è l'*excess return* (spread di rendimento annuo) rispetto al tasso risk-free richiesto dagli azionisti.

Attenzione alla coerenza

Il Risk Ccpital è definito in riferimento al requisito di riserva
$\longrightarrow$ è importante evitare circolarità logiche e doppi conteggi.

Per garantire la coerenza il problema della *Required Reserve* e il problema del *Required Capital* debbono essere considerati congiuntamente e formalizzati con attenzione.

Possono essere definite vie alternative di calcolo, che forniscono approssimazioni "controllate" al problema della valutazione del Risk margin.

$\longleftarrow$ [DFM-06].

Il processo della riserva. Definizione di Risk capital

Negli anni futuri:

$$V_\tau := \mathcal{V}\big(\tau; \{Y_{\tau+1}, \ldots, Y_T\}\big) = \sum_{\theta=\tau+1}^{T} v(\tau,\theta)\, \mathbf{E}_\tau^Q(Y_\theta)\,.$$

Il valore *cum-dividend* è dato da $V_\tau^- := Y_\tau + V_\tau$.

· la r.v. V_1^- rappresenta l'obbligo dell'assicuratore a fine anno;

· si definisce *Risk Adjusted Value* (RAV): $\mathbf{W}_0(V_1^-)$, il valore "worst case" di V_1^-;

· se $R_0^* = V_0$, il Risk capital è:

$$K_0 := v_1\, \mathbf{W}_0(V_1^-) - V_0\,. \qquad (1)$$

• Il RAV $\mathbf{W}_0$ è calcolato con la probabilità naturale, i "prezzi" V_0 e V_1^- con la probabilità risk-neutral $\longrightarrow$ per il calcolo del Risk capital: un "mixed probabilistic approach".

• per il calcolo del RAV va fissato il "livello di toilleranza al rischio", dato dal percentile, collegato al rating (reputazione).

Una rappresentazione rilevante per la finanza d'impresa

Il Risk margin può essere rappresentato come prodotto di 3 fattori:

$$\lambda_0 = \widehat{s} \times \widehat{u} \times \widehat{\mu}\,,$$

• il "fattore di spread" (s-*factor*) $\widehat{s} := \dfrac{s}{1 + v_1\, s}$
$\longleftarrow$ è una stima del premio al rischio della Line of Business;

• il "fattore u" (u-*factor*) $\widehat{u} := \dfrac{\mathbf{U}_0(M_1^-)}{\mathbf{E}_0(M_1^-)} = \dfrac{v_1\, \mathbf{W}_0(M_1^-) - M_0}{M_0}$
$\longleftarrow$ rappresenta il valore relativoi non anticipato dell'aspettativa di fine anno degli impegni residui;

• il fattore di liability (μ-*factor*) $\widehat{\mu} := \sum_{\tau=1}^{T} v_\tau\, \widehat{M}_{\tau-1} = \sum_{\tau=1}^{T} \dfrac{v_\tau}{v_{\tau-1}} \sum_{\theta=\tau}^{T} v_\theta\, \overline{Y}_\theta,$
$\longleftarrow$ è un ammontare monetario che cattura la struttura temporale delle liability attese.

Una volta calcolato il RAV $\mathbf{W}_0(M_1^-)$, per ricavare K_0 e λ_0 sono richieste solo le espressioni delle liability attese $\overline{Y}_\tau$ e i fattori di sconto risk-free v_τ.

Il livello dello spread s ha importanza trascurabile per la determinazione del Risk capital K_0, ma ha rilevanza strategica per la determinazione del Risk margin λ_0 e del requisito di riserva R_0^*.

Confrontare gli approcci

• Livelli di risk margin, essendo la riserva regolamentare definita come 75-esimo e 90-esimo quantile delle OLL.

		modello ODP				modello di Mack			
		media	dvst	min	max	media	dvst	min	max
disc	BE	92.0	0.8	90.2	93.5	92.0	0.8	90.2	93.5
	RR75	97.7	2.5	94.2	105.2	96.3	2.1	93.4	102.6
	RM75	5.7	2.5	2.1	13.4	4.3	2.0	1.6	10.6
	RR90	103.5	5.4	96.1	120.6	100.6	4.4	95.2	115.0
	RM90	11.5	5.4	4.0	28.9	8.7	4.3	3.1	23.1
φ-disc	BE	92.0	0.8	90.2	93.5	92.0	0.8	90.2	93.5
	RR75	97.9	2.6	94.3	105.5	96.3	2.2	93.4	103.1
	RM75	5.9	2.6	2.2	13.7	4.3	2.0	1.6	11.1
	RR90	104.0	5.6	96.2	121.5	100.7	4.5	95.1	116.2
	RM90	12.0	5.6	4.2	29.7	8.7	4.4	3.1	24.2
undisc	BE	100.0	0.0	100.0	100.0	100.0	0.0	100.0	100.0
	RR75	106.4	2.8	102.4	115.0	104.7	2.2	101.7	112.0
	RM75	6.4	2.8	2.4	15.0	4.7	2.2	1.7	12.0
	RR90	113.0	6.1	104.5	132.4	109.5	4.8	103.3	126.3
	RM90	13.0	6.1	4.5	32.4	9.5	4.8	3.3	26.3

• Risk capital ricavati come quantile al 99.5%, dati i risk margin ricavati come 75-esimo e 90-esimo quantile.

		modello ODP								**modello di Mack**			
		approccio YEE				**approccio LM**				**approccio LM**			
		media	dvst	min	max	media	dvst	min	max	media	dvst	min	max
disc	RAV	121.3	16.2	101.1	174.3	117.1	12.6	100.2	155.2	110.8	10.3	98.4	146.8
	BE	92.0	0.8	90.2	93.5	92.0	0.8	90.2	93.5	92.0	0.8	90.2	93.5
	RC75	27.0	15.4	8.2	78.2	22.8	11.8	7.4	59.1	17.1	9.4	5.7	50.2
	RC90	24.7	14.3	7.4	73.2	20.5	10.6	6.6	54.1	15.3	8.4	5.2	44.9
φ-disc	RAV	123.1	17.2	101.5	176.9	118.3	13.3	100.6	157.2	111.0	10.7	98.4	150.0
	BE	92.0	0.8	90.2	93.5	92.0	0.8	90.2	93.5	92.0	0.8	90.2	93.5
	RC75	28.9	16.4	8.6	80.8	24.0	12.5	7.7	61.1	17.2	9.8	5.7	53.3
	RC90	26.5	15.2	7.9	75.8	21.7	11.4	7.0	56.1	15.5	8.7	5.1	47.6
undisc	RAV	133.9	18.9	110.3	192.9	128.6	14.7	109.3	171.4	120.6	11.5	106.9	163.1
	BE	100.0	0.0	100.0	100.0	100.0	0.0	100.0	100.0	100.0	0.0	100.0	100.0
	RC75	31.6	17.9	9.4	88.4	26.3	13.7	8.4	66.9	18.8	10.7	6.2	58.2
	RC90	29.2	16.8	8.7	83.3	23.9	12.6	7.7	61.8	17.0	9.6	5.6	52.4
flat	RAV	133.9	18.9	110.3	192.9	128.6	14.7	109.3	171.4	120.6	11.5	106.9	163.1
	BE	100.0	0.0	100.0	100.0	100.0	0.0	100.0	100.0	100.0	0.0	100.0	100.0
	RC	33.9	18.9	10.3	92.9	28.6	14.7	9.3	71.4	20.6	11.5	6.9	63.1

- Risk margin come costo del capitale ricavato dal quantile al 99.5%   (spread $s = 6\%$).

		modello ODP								modello di Mack			
		approccio YEE				**approccio LM**				**approccio LM**			
		media	dvst	min	max	media	dvst	min	max	media	dvst	min	max
disc	RAV	121.3	16.2	101.1	174.3	117.1	12.6	100.2	155.2	110.8	10.3	98.4	146.8
	BE	92.0	0.8	90.2	93.5	92.0	0.8	90.2	93.5	92.0	0.8	90.2	93.5
	RC	27.7	15.4	8.5	78.0	23.7	12.0	7.7	60.0	17.8	9.7	6.0	51.8
	RM	4.4	2.5	1.3	12.8	3.8	2.0	1.2	9.9	2.8	1.5	1.0	8.2
φ-disc	RAV	123.1	17.2	101.5	176.9	118.3	13.3	100.6	157.2	111.0	10.7	98.4	150.0
	BE	92.0	0.8	90.2	93.5	92.0	0.8	90.2	93.5	92.0	0.8	90.2	93.5
	RC	29.4	16.3	8.9	80.5	24.8	12.7	8.0	61.8	17.9	10.0	6.0	54.8
	RM	4.7	2.7	1.4	13.3	4.0	2.1	1.3	10.2	2.8	1.6	0.9	8.7
undisc	RAV	133.9	18.9	110.3	192.9	128.6	14.7	109.3	171.4	120.6	11.5	106.9	163.1
	BE	100.0	0.0	100.0	100.0	100.0	0.0	100.0	100.0	100.0	0.0	100.0	100.0
	RC	32.0	17.8	9.7	87.6	27.0	13.8	8.7	67.3	19.5	10.9	6.5	59.5
	RM	5.6	3.2	1.7	15.7	4.7	2.5	1.5	12.1	3.4	1.9	1.1	10.3
flat	RAV	133.9	18.9	110.3	192.9	128.6	14.7	109.3	171.4	120.6	11.5	106.9	163.1
	BE	100.0	0.0	100.0	100.0	100.0	0.0	100.0	100.0	100.0	0.0	100.0	100.0
	RC	33.9	18.9	10.3	92.9	28.6	14.7	9.3	71.4	20.6	11.5	6.9	63.1
	RM	5.9	3.4	1.8	16.6	5.0	2.6	1.6	12.8	3.6	2.0	1.2	10.9

Valutare con accortezza le implicazioni dei QIS2

• Risk capital di riserva con i QIS2 e con i modelli stocastici

QIS2: expected shortfall al 99%; stocastici: da quantili al 99.5% (RM come CoC, $s = 6\%$)

! grandi vantaggi dall'utilizzazione dei modelli interni.

Alcuni dettagli tecnici

Nelle specifiche tecniche per il secondo studio di impatto quantitativo (QIS2) pubblicate in maggio dal CEIOPS [CEIOPS-06], viene proposto un approccio *factor-based* in cui il *solvency capital requirement* (SCR) per il reserve risk $K^{(QIS)}$ è ricavato seguendo un protocollo di calcolo articolato in 5 passi.

1) Vengono definiti 11 rami (*Line of Business*, LoB) per l'assicurazione danni; per ogni ramo k viene specificato un valore "*marked-wide*" per il *fattore di volatilità* f_k.

2) La *volatilità di ramo* per ogni impresa è calcolata come:

$$\sigma_k = f_k \, s(\widetilde{R}_k) \, ,$$

dove $\widetilde{R}_k$ is è la "*provision for claims outstanding*" (al lordo della riassicurazione) del ramo, e s è un *size factor* specificato come una funzione non crescente di $\widetilde{R}_k$, della forma:

$$s(\widetilde{R}_k) = \begin{cases} 1 & se \; \widetilde{R}_k \geq 100, \\ \frac{10}{\sqrt{\widetilde{R}_k}} & se \; 100 > \widetilde{R}_k \geq 20, \\ \frac{10}{\sqrt{20}} & se \; \widetilde{R}_k < 20, \end{cases}$$

essendo $\widetilde{R}_k$ espressa in milioni di Euro.

3) La volatilità (per unità di riserva) σ relativa a tutto il comparto danni è ricavata aggregando le volatilità di ramo secondo la formula di covarianza:

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{11} \sum_{j=1}^{11} w_k \, w_j \, \sigma_k \, \sigma_j \, c_{kj} \, ,$$

dove $\{c_{kj}\}$ è una specificata matrice di correlazione tra i rami, e i coefficienti di ponderazione sono definiti come:

$$w_k := \frac{R_k}{\sum_{j=1}^{11} R_j} \, ,$$

essendo R_k "*the net provision for claims outstanding*" del ramo k.

4) Il "*Basic Solvency Capital Requirement*" BSCR per il reserve risk viene ottenuto come:

$$\mathsf{BSCR} = \rho(\sigma) \sum_{k=1}^{11} R_k \, ,$$

dove ρ è una funzione espressa dalla:

$$\rho(x) := \frac{0.99 - N\Big(N^{-1}(0.99) - \sqrt{\log(x^2+1)}\Big)}{0.01} \, , \tag{2}$$

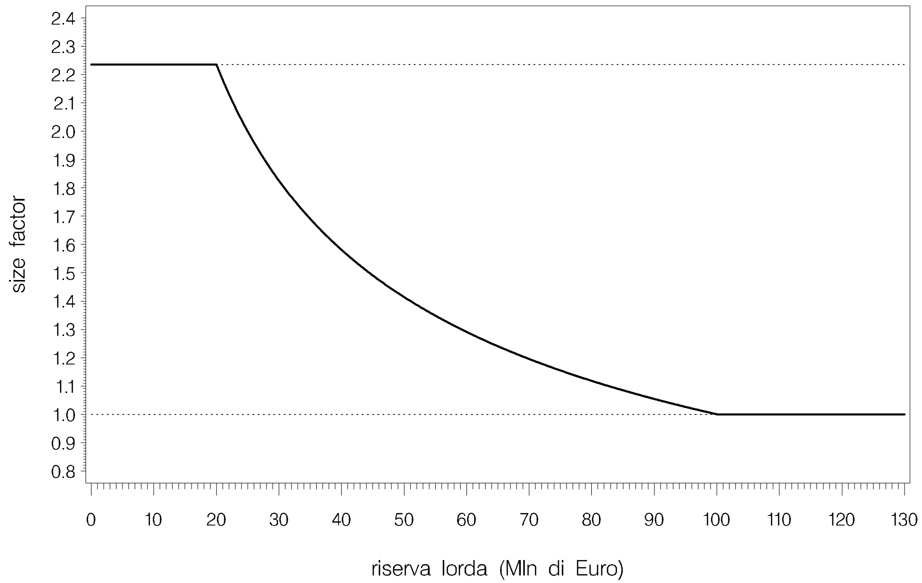
essendo $N(x)$ la funzione di ripartizione normale standard.

5) L'SCR è infine ricavato come:

$$K^{(\mathsf{QIS})} := \mathsf{BSCR} - \mathsf{PL}\,,$$

dove PL rappresenta l'"*expected profit or loss arising from next year's business*".

Nel quadro del QIS2, l'RC Auto è il ramo $k = 2$ e il corrispondente fattore di volatilità market-wide è posto al livello $f_2 = 0.15$. Dato che si considera qui solamente l'RC Auto, il calcolo dell'SCR è stato effettuato a livello di ramo singolo, saltando il passo (c) (o, ciò che è lo stesso, ponendo $R_k = 0$ per $k \neq 2$) e considerando il valore ottenuto di $K^{(\mathsf{QIS})}$ per l'RC Auto come un requisito di capitale "stand-alone". Il fattore di volatilità f_2 va moltiplicato per il size factor, che è specifico dell'impresa; la forma di questa funzione è illustrata nella figura.



Si può dimostrare (si veda per es. [CDFM-05], p. 383) che l'espressione (2) della funzione $\rho(x)$ è quella del TailVaR al livello di confidenza del 99% di una variabile aleatoria lognormale con media 1 e deviazione standard x.
Nel documento tecnico viene esplicitamente proposta l'ipotesi approssimata che il TailVaR al 99% rappresenti "*an equivalent level of prudence*" rispetto al VaR al 99.5% (p. 4). Quindi i risk capital ricavati dai modelli stocastici possono essere coerentemente confrontati con gli SCR prescritti dal CEIOPS definendo il RAV come un quantile al livello $\alpha = 99.5\%$.

Viste le definizioni riportate alle pp. 20-22 del QIS2, la detrazione ***PL*** relativa a un singolo ramo è essenzialmente data dalla frazione di risk margin del ramo allocata nell'anno $\tau = 1$ (proporzionalmente ai livelli di riserva); questa quantità, quindi, risulta molto simile al risk loading di primo anno γ_1 definito in [DFM-06, pp. 8-10].

Considerare l'inflazione di ramo

- Tassi di inflazione

anno	$r^{(E)}$	$r^{(R^s)}$	$r^{(P)}$	$r^{(U)}$	$r^{(e)}$
1996	7.66	5.99	5.70	5.76	3.9
1997	7.26	6.33	6.55	6.50	1.7
1998	10.25	11.60	11.60	11.60	1.8
1999	7.07	5.96	6.35	6.27	1.6
2000	7.84	6.68	6.80	6.77	2.6
2001	13.50	12.82	13.82	13.60	2.7
2002	10.49	9.29	9.19	9.21	2.4
2003	10.11	9.29	9.25	9.26	2.5
2004	10.23	14.99	13.26	13.65	2.0
media	9.38	9.22	9.17	9.18	2.4

· $r_i^{(E)}$: è il tasso medio equipesato;

· $r_i^{(R)}$: è il tasso medio pesato con le riserve di bilancio R^s;

· $r_i^{(P)}$: è il tasso medio pesato col totale dei pagati S;

· $r_i^{(U)}$: è il tasso medio pesato coi costi ultimi totali U prodotti dal chain-ladder;

· $r_i^{(e)}$: è il tasso di inflazione economica.

Modello ODP con inflazione stocastica

- dati storici riportati a costi correnti
- inflazione proiettata (modello stocastico): tasso annuo 7.5%, volatilità 4%.

Riferimenti bibliografici

[CDFM-05] Castellani, G. De Felice, M., Moriconi, F., *Manuale di finanza – II. Teoria del portafoglio e del mercato azionario*, Bologna, Il Mulino, 2005.

[CDFMP-05] Castellani, G. De Felice, M., Moriconi, F., Pacati, C., *Embedded Value in Life Insurance*, Working Paper, March 2005.

[CEIOPS-06] CEIOPS, *Quantitative Impact Study 2. Technical Specification*, May 2006.

[CFO-06] CFO Forum, *Elaborated Principles for an IFRS Phase II. Insurance Accounting Model*, June 2006.

[CRO-06] CRO Forum, *A market cost of capital approach to market value margins*, March 2006.

[DFM-03] De Felice, M., Moriconi, F., *Risk Based Capital in P&C Loss Reserving or Stressing the Triangle*, Research Group on Insurance Companies and Pension Funds, Working Paper n. 1, December 2003.

[DFM-05] De Felice, M., Moriconi, F., *Market Based Tools for Managing the Life Insurance Company*, Astin Bulletin, 35(2005), 1.

[DFM-06] De Felice, M., Moriconi, F., *Assessing Risk Margin in P&C Loss Reserving*, DGVFM Scientific Insurance Day, Köln, April 2006.

[E-02] England, P., *Addendum to "Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving"*, Insurance: Mathematics and Economics, 31(2002), 461-466.

[EV-99] England, P., Verral, R., *Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving*, Insurance: Mathematics and Economics, 25(1999), 281-293.

[FOPI-04] Federal Office of Private Insurance, *Whitepaper on the Swiss Solvency Test*, 2004.

[M-93] Mack, T., *Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates*, ASTIN Bulletin, 23(1993), 213-225.

[RV-98] Renshaw, A.E., Verral, R.J., *A stochastic model underlying the chain ladder technique*, British Actuarial Journal, 4(1998), 903-923.